Решения заданий отборочного этапа
Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике 2024-25 г.г.
11 класс

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

11.1. Можно ли расставить в вершинах куба восемь различных целых чисел так, чтобы число, стоящее в любой вершине, было равно сумме трёх чисел, стоящих в вершинах, соединённых с данной вершиной ребром?

Ответ. Да, можно. Пример: в вершинах A,B,C,D,A_1,B_1,C_1,D_1 будут записаны соответственно числа 1,2,4,3,-4,-3,-1,-2.

Решение. Обозначим вершины куба стандартным способом за $ABCDA_1B_1C_1D_1$, и обозначим записанные в вершинах A, B, C, D числа за a, b, c, d соответственно. Если расстановка удовлетворяет условиям задачи для вершин A, B, C, D, то числа в вершинах A_1, B_1, C_1, D_1 равны $a-b-d,\ b-a-c,\ c-b-d, d-a-c$. Чтобы расстановка удовлетворяла условиям задачи для вершин A_1, B_1, C_1, D_1, должны выполняться равенства $a-b-d=a+(b-a-c)+(d-a-c) <=> a+c=b+d$, $b-a-c=b+(a-b-d)+(c-b-d) <=> a+c=b+d$, $c-b-d=c+(b-a-c)+(d-a-c) <=> a+c=b+d$, $d-a-c=d+(c-b-d)+(a-b-d) <=> a+c=b+d$. Таким образом, необходимым и достаточным выполнением требования условий задачи является равенство $a+c=b+d$, равносильное $d=a+c-b$. Тогда в вершинах A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 должны стоять соответственно числа $a, b, c, a+c-b, -c, -a-c+b, -a, -b$. Все эти числа должны быть разными, для этого достаточно положить $a=1, b=2, c=4$. При этом в вершинах A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 будут записаны соответственно числа 1,2,4,3,-4,-3,-1,-2.

Критерии проверки. (●) Только приведён любой верный пример расстановки с проверкой: 7 баллов. (●) Если нет проверки и пример не очевиден, но верен: снимаем 1 балл. (●) Если хотя бы в одной вершине условие не выполнено: 0 баллов.

11.2. На доске записаны несколько (не менее трёх) различных действительных чисел. Известно, что из любых трёх различных записанных чисел всегда можно выбрать два, сумма которых тоже записана на доске. Какое наибольшее количество чисел может быть записано на доске?

Ответ. 7.

Решение. Пример семи чисел, удовлетворяющих условию задачи: -3,-2,-1,0,1,2,3. Проверка выполнимости условия для любой тройки чисел из этого множества: 1) если в тройке есть оба числа 3 и -3, их и выберем, 2) если тройка содержит ровно одно из чисел 3 или -3, откидываем это число, оставшиеся по модулю не больше 2 и их сумма – целое число, по модулю не большее 3, значит принадлежит X, 3) тройка не содержит чисел 3 или -3, тогда сумма любых двух её чисел – целое число, по модулю не большее 3, значит принадлежит X.

Докажем, что больше семи чисел быть не может. Допустим обратное, что на доске записано не меньше восьми чисел, тогда среди них не меньше четырёх ненулевых чисел одного знака. Без ограничения общности можем считать, что эти числа положительные, обозначим четыре максимальных числа, записанных на доске, за $a>b>c>d>0$. Рассмотрим тройку $a>b>c$, в силу максимальности a и положительности остальных, только сумма $b+c>b$ может быть записана на доске и равняться она может только a Теперь рассмотрим тройку $a>b>d$, в силу тех же соображений только сумма $b+d>b$ может быть записана на доске, и равняться она может только a. В таком случае $b+d=a=b+c$, откуда $d=c$, что противоречит условию о различии всех написанных чисел. Значит, положительных среди записанных чисел может быть не больше трёх. Аналогично, рассматривая самые меньшие записанные числа, доказывается, что среди них не больше трёх отрицательных.

Критерии проверки. (●) Угадан правильный ответ и приведён пример с проверкой: 2 балла. (●) Отсутствие проверки неочевидного примера: минус 1 балл. (●)Доказано, что чисел не может быть больше семи: 5 баллов. (●) Доказано фактически только, что среди записанных чисел может быть не больше трёх положительных (то есть совсем нет аналога фразы «Аналогично, рассматривая самые меньшие записанные числа, доказывается, что среди них не больше трёх отрицательных»): снимаем 1 балл.

11.3. В треугольнике ABC серединные перпендикуляры к биссектрисам углов A и C пересекаются на стороне AC. Доказать, что $AB \cdot BC = AC^2$.

Доказательство. Обозначим точки пересечения сторон AB и BC биссектрисами углов C и A соответственно за M и K, а точку пересечения серединных перпендикуляров к биссектрисам AK и CM на стороне AC за P. В равнобедренном треугольнике APK величины углов при вершинах A и K равны половине угла BAC исходного треугольника, поэтому его внешний угол KPC равен углу BAC. Следовательно, треугольник KPC подобен исходному треугольнику ABC. Аналогично, в равнобедренном треугольнике CPM величины
углов при вершинах A и K равны половине угла BCA исходного треугольника, поэтому его внешний угол MPA равен углу BCA. Следовательно, треугольник MPA подобен исходному треугольнику ABC.

Обозначим длины сторон BC, AC, AB за a, b, c соответственно, тогда, ввиду свойства биссектрисы, AM:MB=$b{:}\,a$, поэтому $AM = \frac{bc}{a+b}, MB = \frac{ac}{a+b}$. Тогда коэффициент подобия треугольников MPA и ABC равен AM:AB=$\frac{b}{a+b}$. Аналогично, CK:KB=b: c, поэтому $CM = \frac{ab}{b+c}, MB = \frac{ac}{b+c}$. Тогда коэффициент подобия треугольников KPC и ABC равен CM:CB=$\frac{b}{b+c}$. Сумма длин AP и PC равна AC, поэтому сумма коэффициентов подобия равна 1, следовательно: $\frac{b}{a+b} + \frac{b}{b+c} = 1$. Тогда $b^2 + bc + ab + b^2 = ab + b^2 + ac + bc$, после приведения подобных получим $b^2 = ac$, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. (●) Доказаны подобия треугольников MPA и ABC, KPC и ABC: 3 балла. (●) Найдены коэффициенты подобий: 2 балла. (●) Замечено, что сумма коэффициентов подобий равна 1, отсюда получено соотношение $b^2 = ac$: 2 балла.

11.4. Решить в действительных числах систему уравнений: $\begin{cases} \frac{1}{xy} = \frac{y}{z} + 1, \\ \frac{1}{yz} = \frac{z}{x} + 1, \\ \frac{1}{zx} = \frac{x}{y} + 1. \end{cases}$

Ответ. $x = y = z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение. Докажем сначала, что в решении данной системы значения всех переменных должны быть одного знака. Действительно, если тройка (x, y, z) - решение системы, то и тройка $(-x, -y, -z)$ - решение системы, поэтому можно считать, $x > 0$. Если при этом $y, z < 0$, то в первом уравнении левая часть отрицательна, а правая – положительна, противоречие. Если $y > 0, z < 0$, то в третьем уравнении левая часть отрицательна, а правая – положительна, противоречие. Если же $y < 0, z > 0$, то во втором уравнении левая часть отрицательна, а правая – положительна, противоречие.

Пусть теперь значения всех переменных положительны. Ввиду цикличности системы относительно переменных, можно считать, что x – меньшая из них. Рассмотрим сначала случай $0 \leq x \leq y \leq z$. Тогда из первых двух уравнений следует, что $1 + \frac{y}{z} = \frac{1}{xy} \geq \frac{1}{yz} = \frac{z}{x} + 1$, откуда $xy \geq z^2$, что вместе с предположением $x \leq y \leq z$ даёт $x = y = z$.

Теперь рассмотрим случай $0 \leq x \leq z \leq y$. Тогда из второго и третьего уравнений следует, что $1 + \frac{z}{x} = \frac{1}{yz} \leq \frac{1}{xz} = \frac{x}{y} + 1$, откуда $yz \leq x^2$, что, вместе с предположением $x \leq y \leq z$, снова даёт $x = y = z$. Подставим это в первое уравнение, получим $\frac{1}{x^2} = 2, x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Критерии проверки. (●) Угаданы оба решения системы: 1 балл. (●) Доказано, что в решении все переменные одного знака: 2 балла. (●) Не разобран один из случаев $0 \leq x \leq y \leq z$ или $0 \leq x \leq z \leq y$: снимаем 2 балла.

11.5. Вершины правильного 50-угольника занумерованы натуральными числами от 1 до 50 включительно. Петя и Вася играют в следующую игру. Очередным ходом каждый игрок соединяет отрезком любые две различные вершины, номер одной из которых делит номер другой, и которые к этому моменту ещё не соединены отрезком. Побеждает тот игрок, после хода которого впервые образуется треугольник с вершинами в вершинах 50-угольника, одна из которых имеет номер 50. Сначала никакая пара вершин не соединена отрезком. Первым ходит Петя. Кто из них победит при правильной игре? Отрезки могут пересекаться.

Ответ. Выиграет Петя.

Решение. Укажем выигрышную стратегию для Пети. Первым ходом он должен соединить вершины с номерами 1 и 50. Теперь тот, кто после этого первым совершит один из ходов (1,2), (1,5), (1,10), (1,25), (2,50), (5,50), (10,50), (25,50), проиграет, потому, что на его ход (1,x) противник ответит ему ходом (x,50) (или наоборот) и выиграет. Поэтому дальше Пете нужно отвечать на ходы Васи, отличные от восьми указанных, любыми ходами, отличными от восьми указанных. Каждый такой ход безопасен для обоих игроков потому, что не создаёт треугольника с вершиной номер 50 и не создаёт новой угрозы, аналогичной ходу (1,50). Докажем, что таких ходов всего чётное количество, поэтому Пете удастся реализовать указанную стратегию.

Первый тип таких ходов – это ходы вида $(1, x), x = 2,3, \dots, 49, x \neq 2,5,10,25$, их 48-4=44 штуки, это чётное число.

Второй тип таких ходов – это ходы вида $(x, y), 1 < x < y < 50, x \vdots y$. При фиксированном y это число равно количеству собственных делителей y, то есть делителей, отличных от 1 и самого y. Это число является чётным, если y не является квадратом натурального числа, и нечётным, если y является квадратом натурального числа, так как все собственные делители y, отличные от $\sqrt{y}$, можно объединить в пары $(x, y), (\frac{y}{x}, y)$. Точных же квадратов, больших 1 и меньших 50, существует шесть, это 4,9,16,25,36 и 49, это тоже чётное число. Следовательно, сумма количеств собственных делителей у всех y, не являющихся квадратами, чётна, как сумма чётных чисел, а сумма количеств собственных делителей у всех y, являющихся квадратами чётна, как сумма чётного числа нечётных чисел. Значит, общее число ходов второго типа чётно, и выигрышная стратегия Пети реализуема.

Критерии проверки. (●) Присутствует идея разделения ходов на опасные, и они указаны явно, и безопасные: 1 балл. (●) Присутствует явная формулировка выигрышной стратегии Пети, то есть идея первого хода Пети (1,50), и ответа Пети парными безопасными ходами на ходы Васи: ещё 1 балл. (●) Доказательство стратегии: чётность числа ходов вида $(1, x), x = 2,3, \dots, 49, x \neq 2,5,10,25$: 1 балл. (●) Доказательство стратегии: чётность числа ходов вида $(x, y), 1 < x < y < 50, x \vdots y$ и y не является квадратом натурального числа: 2 балла. (●) Доказательство стратегии: чётность числа ходов вида $(x, y), 1 < x < y < 50, x \vdots y$ и y является квадратом натурального числа: 2 балла.